

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ЦЕНТРАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XI НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
<http://astro-olymp.org>

III кръг
10 май 2008 г.

Ученици от 11-12 клас

1 задача. Телата в Слънчевата система, които се намират на различни средни разстояния от Слънцето, имат различни сидерични периоди на обикаляне около него. Нарисувайте качествено как би изглеждала графиката на изменение на синодичния период на телата с увеличаване на средното им разстояние до Слънцето. За да представите по-добре графиката, пресметнете сидеричния период и съответно разстоянието до Слънцето за няколко характерни стойности на синодичния период.

Решение:

Нека разгледаме случая на тяло, чието средно разстояние до Слънцето е по-малко от радиуса на земната орбита. Ако неговият сидеричен период на обикаляне около Слънцето е T , а орбиталният период на Земята е T_0 , то за синодичния период T' на тялото можем да напишем:

$$\begin{aligned} 1/T' &= 1/T - 1/T_0 \\ T' &= TT_0 / (T_0 - T) \end{aligned} \quad (1)$$

С отдалечаване на тялото от Слънцето, съгласно III закон на Кеплер, неговият сидеричен период ще нараства. Числителят в горната формула също ще нараства, а знаменателят ще намалява. Следователно синодичният период на тялото ще расте. С приближаване на стойността на сидеричния период на тялото до орбиталния период на Земята, синодичният му период ще се стреми към безкрайност.

За синодичния период на тяло със средно разстояние до Слънцето по-голямо от радиуса на земната орбита, можем да напишем:

$$\begin{aligned} 1/T' &= 1/T_0 - 1/T \\ T' &= TT_0 / (T - T_0) \end{aligned} \quad (2)$$

Колкото по-малък е сидеричният период на тялото, толкова по-голям става синодичният му период. С приближаване на сидеричния период на тялото до периода T_0 на обикаляне на Земята около Слънцето, синодичният му период се стреми към безкрайност. При отдалечаване на тялото от Слънцето сидеричният му период ще расте. Колкото по-голям става сидеричният период от периода T_0 на обикаляне на Земята около Слънцето, толкова синодичният период на тялото T' ще се доближава по стойност до T_0 .

Теоретично най-кратък сидеричен период T_1 ще има тяло, което обикаля около Слънцето по кръгова орбита с радиус, равен на слънчевия радиус R_0 . Съгласно III закон на Кеплер за този случай:

$$R_0^3 / T_1^2 = r_0^3 / T_0^2$$

където r_0 е радиусът на земната орбита.

$$T_1 = T_0 (R_0/r_0)^{3/2}$$

$$T_1 = 0.0003 T_0$$

$$T_1 \approx 2.8 \text{ h} \approx 2 \text{ h } 48 \text{ min}$$

Както се вижда от формула (1), тъй като $T_1 \ll T_0$, в този случай синодичният период на тялото почти няма да се отличава от сидеричния му период.

Да пресметнем при какво разстояние от Слънцето синодичният период на тялото ще бъде половин година. Очевидно това не може да се реализира при тяло, чието средно разстояние до Слънцето е по-голямо от земното. За по-близко до Слънцето тяло от формула (1) получаваме:

$$T_2 = T'T_0 / (T_0 + T') = T_0/3$$

Средното разстояние до Слънцето r_2 , на което би обикаляло тяло с такъв сидеричен период можем да пресметнем от III закон на Кеплер:

$$r_2 = r_0(T_2/T_0)^{2/3}$$

$$r_2 \approx 0.48 r_0$$

Да пресметнем също на какво разстояние синодичният период на тялото би бил две години. За по-близко до Слънцето тяло от формула (1) получаваме:

$$T_3 = T'T_0 / (T_0 + T') = 2T_0/3$$

$$r_3 = r_0(T_3/T_0)^{2/3}$$

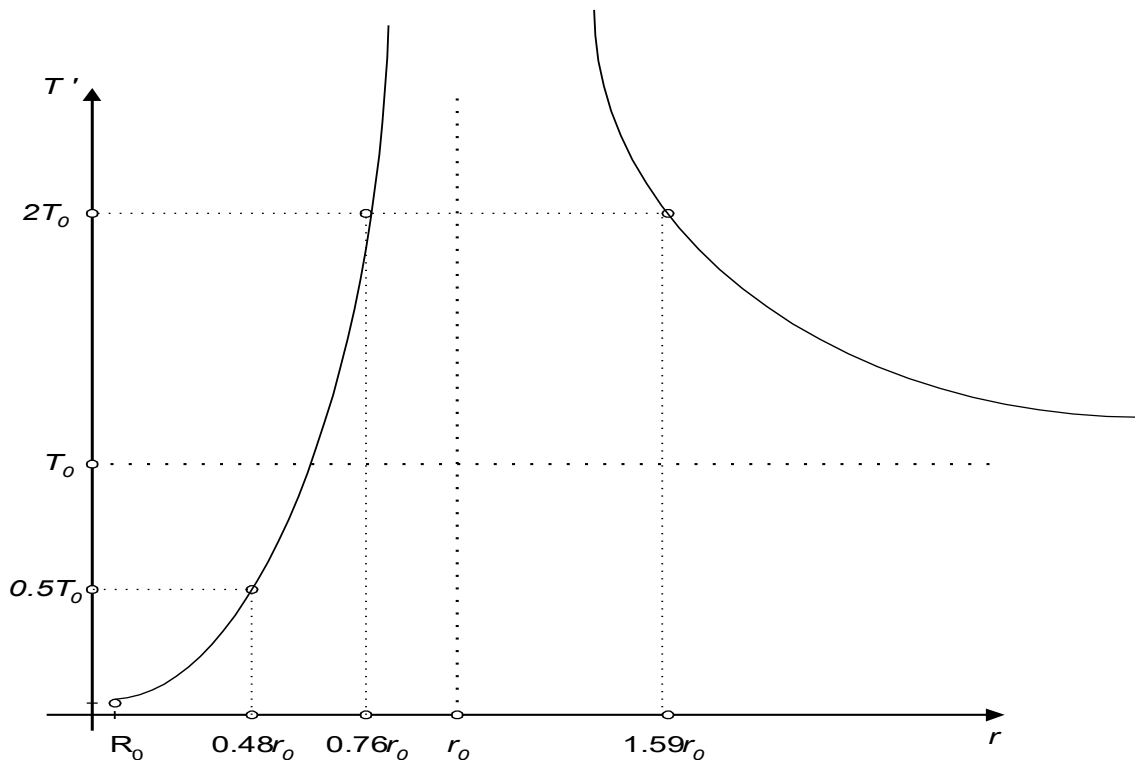
$$r_3 \approx 0.76 r_0$$

За по-далечно от Слънцето тяло от формула (2) получаваме:

$$T_4 = T'T_0 / (T' - T_0) = 2T_0$$

$$r_4 = r_0(T_4/T_0)^{2/3}$$

$$r_4 \approx 1.59 r_0$$



2 задача. Когато станало ясно, че дори най-близките звезди имат паралакс под $1''$ (една дъгова секунда), окончателно било потвърдено, че звездите са самосветещи тела. Докажете, че звездите не могат да са обекти, които отразяват слънчева светлина.

Решение:

Звездната величина на най-слабите звезди, видими с невъоръжено око, е 6^m . Да си представим една такава звезда, отдалечена на 1 парсек, т.е. звезда, чиито паралакс е $1''$. Да си представим също, че тя не излъчва собствена светлина, а представлява кълбо, отразяващо светлината на Слънцето с отражателна способност 100%. Да оценим

радиуса R на такова кълбо, като предполагаме, че видимата от Земята звездна величина на звездата е $m = 6^m$.

Осветеността, която Слънцето създава върху кълбото ще бъде:

$$E = L / 4\pi r^2$$

където L е светимостта на Слънцето, а r е разстоянието до звездата. Осветеността, която звездата създава за земния наблюдател, ще бъде:

$$E_1 = E \cdot \pi R^2 / 2\pi r^2 = L R^2 / 8\pi r^4$$

Да я сравним с осветеността E_0 , която Слънцето създава върху Земята:

$$E_0 = L / 4\pi r_0^2$$

където r_0 е разстоянието от Земята до Слънцето. Използваме формулата на Погсън:

$$\begin{aligned} E_0 / E_1 &= 2.512^{m-M} \\ 2r^4 / r_0^2 R^2 &= 2.512^{m-M} \\ R &= 2r^2 / 2.512^{(m-M)/2} \cdot r_0 \\ R &\approx 25\,000 \text{ а.е.} \end{aligned}$$

За да се вижда като звезда от 6^m , отразяващото слънчева светлина кълбо трябва да има гигантски размери, 25 000 пъти по-големи от земната орбита. На разстояние 1 парсек, който е равен на 206265 а.е., това кълбо би имало видим ъглов радиус:

$$206265 / 25\,000 \text{ дъгови секунди} \approx 7^\circ!$$

Но звездите са точкови обекти. Следователно е абсолютно невъзможно те да светят с отразена от Слънцето светлина.

3 задача. След милиарди години еволюция нашето Слънце изчерпва своята енергия и се превръща в бяло джудже. Хората решават да търсят друга, по-млада звезда и тръгват на дълго пътешествие, използвайки като космически кораб цялата Земя. За да продължи нормалният живот на планетата, те осъществяват проекта “Птолемей” – създават “геоцентрична” планетна система. Човешката цивилизация сътворява изкуствено слънце, което се движи в орбита около Земята. При положение, че Земята се върти около оста си със същия период, както сега, на какво разстояние трябва да обикаля около нея новото слънце, така че продължителността на денонощието да се запази почти същата, каквато е сега? Каква трябва да е светимостта на изкуственото слънце, за да имаме приблизително същия климат? Само една ли е подходящата орбита? Може ли орбитата да е такава, че да има и сезонни промени на земната повърхност?

Приемете, че масата на новото слънце е много по-малка от масата на Земята.

Решение:

Земята се върти около оста си с период $T = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 04 \text{ sec}$, наречен звездно денонощие. Ние искаме продължителността на слънчевото денонощие при новото слънце да е същата, както сега, т.е. $T_1 = 24$ часа. Да отбележим периода на обикаляне на изкуственото Слънце около Земята с T_S . Новото слънце трябва да обикаля около Земята в същата посока, в която тя се върти около себе си. Тогава е в сила съотношението:

$$\begin{aligned} 1/T_1 &= 1/T - 1/T_S \\ T_S &= TT_1 / (T_1 - T) \end{aligned}$$

Дори без да правим числените пресмятания, от формулата можем да разберем, че слънцето трябва да обикаля около Земята с период една сегашна година, или $T_S \approx 365$ дни. Означаваме разстоянието от земята до слънцето с r . Като използваме III закон на Кеплер, получаваме:

$$r^3 / T_S^2 = \gamma M / 4\pi^2$$

където M е масата на Земята, а γ е гравитационната константа.

$$r = (\gamma M T_S^2 / 4\pi^2)^{1/3}$$

$$r \approx 2 \times 10^6 \text{ km}$$

Ако предположим, че изкуственото слънце излъчва във всички посоки, подобно на звезда, то ние можем да сравним неговата светимост L с тази на сегашното истинско Слънце $L_0 = 3.8 \times 10^{26} \text{ W}$. За да може Земята да получава същата слънчева енергия в единица време от изкуственото слънце, както от истинското, то трябва да е изпълнено съотношението:

$$L / L_0 = r^2 / r_0^2$$

където r_0 е радиусът на земната орбита около истинското Слънце сега.

$$L = L_0 r^2 / r_0^2$$

$$L \approx 6.8 \times 10^{22} \text{ W}$$

Получава се доста голямо разстояние, при което разходът на енергия от изкуственото слънце ще бъде огромен. То ще трябва да излъчва само около 5600 пъти по-слабо от истинското Слънце сега.

Възможно е обаче и друго решение. Слънцето може да се движи около Земята в посока на нейното въртене и то така, че да изгрява от запад и да залязва на изток. В такъв случай можем да напишем:

$$-1/T_I = 1/T - 1/T_S$$

$$T_S = TT_I / (T_I + T)$$

$$T_S \approx 12.08 \text{ h} \approx 12 \text{ h } 05 \text{ min}$$

Разстоянието, на което трябва да бъде при това положение слънцето, е:

$$r \approx 26800 \text{ km}$$

За да намерим необходимата светимост на изкуственото слънце, трябва да отчетем и факта, че радиусът на неговата орбита около центъра на Земята вече е сравним със земния радиус. Следователно в нашите изчисления трябва да използваме не този радиус, а разстоянието от слънцето до повърхността на Земята:

$$L / L_0 = (r - R)^2 / r_0^2$$

където R е радиусът на Земята.

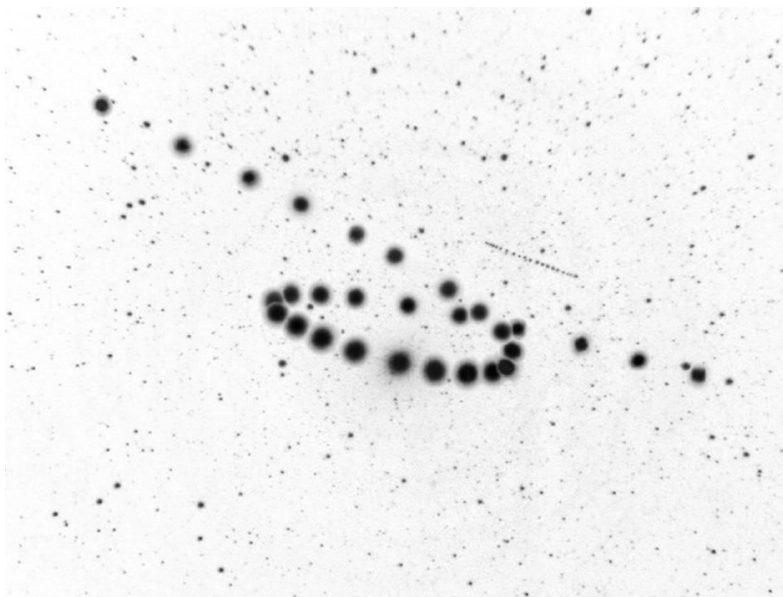
$$L = L_0 (r - R)^2 / r_0^2$$

$$L \approx 7 \times 10^{18} \text{ W}$$

Искусственото слънце ще трябва да излъчва с мощност около 54 милиона пъти по-малка от тази на настоящото истинско Слънце. Но това пак си е колосална мощност. За да намалим още повече разходите на енергия, трябва да направим изкуственото слънце източник на насочена светлина. Най-просто решение е да сложим едно вдлъбнато параболично огледало от обратната страна на слънцето, например. Друг проблем е свързан с това, че Слънцето ще дава необходимата енергия на земната повърхност при така изчисления радиус само когато е достатъчно високо над хоризонта. Когато е ниско над хоризонта, то ще е съществено по-далеч от съответния пункт на земната повърхност. Това означава, че сутрин и вечер ще става доста студено. Така че най-добре ще бъде слънцето да обикаля по орбита с малко по-малък радиус. За по-добро регулиране на земния климат е добре орбитата на слънцето да е наклонена спрямо равнината на земния екватор. Така ще се осигури смяна на сезоните. Това ще бъде възможно, тъй като всеки ден за дадено място Слънцето ще кулминира на различна височина над хоризонта. Друг начин е орбитата на изкуственото Слънце да се направи леко елиптична, така че в моментите на горна кулминация разстоянието до него да се променя. Тогава, обаче, сезоните ще се променят еднакво за двете полукълба на Земята, а няма да са противоположни за северното и южното полукълбо.

4 задача. Разполагате със снимка показваща последователни положения на Марс през част от 2003 година. Но на нея се виждат и положенията на друг космически обект за същия период. Определете кой е този обект.

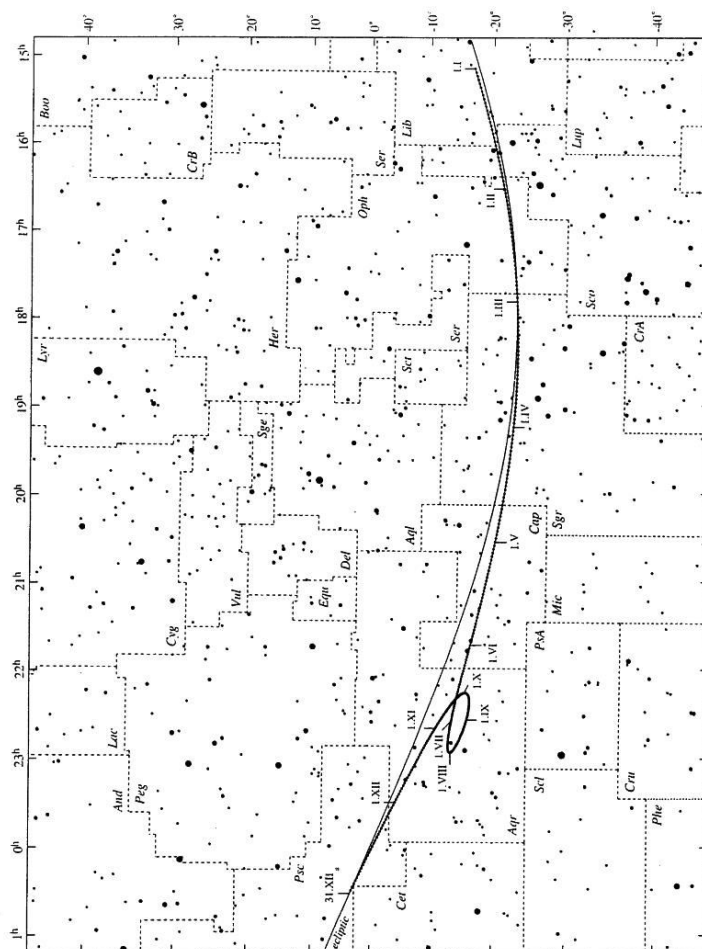
Използвайте и схемата, взета от астрономическия алманах, на която е даден видимият път на Марс на фона на звездите през цялата 2003 година.



Решение:

Очевидно това е обект, който принадлежи към Слънчевата система и е по-далечен от Марс. Сравнението между снимката и схемата в алманаха показва, че на снимката се виждат положенията на Марс в периода приблизително от 1 юни до края на октомври 2003 година, което съответства на около пет месеца. Възелът във видимата траектория на Марс показва, че около средата на този период планетата е била в опозиция. Тъй като неизвестният обект се вижда почти в същото направление, където е и възелът в траекторията на Марс, то и той също е бил в опозиция. Сгъстяването на точките към двата края на следата на обекта показва, че е обхванат приблизително периодът, когато обектът е имал ретроградно движение на фона на звездите. Можем да считаме, че ъгловата дължината на следата α съответства на ъгловия размер на „примката“, която обектът описва при видимото си движение на фона на звездите.

Да направим приблизителна оценка на разстоянието r от нас до обекта. Нека отначало считаме, че поради голямата отдалеченост на обекта можем да пренебрегнем



Видимият път на Марс $\odot$ през 2003 г.

неговото преместване по орбитата му в рамките на петте месеца, в които са заснети положенията му. Тогава ъгловият размер на „примката“, която той описва по небето, съответства на видимия от обекта ъглов диаметър $2r_0$ на земната орбита около Слънцето:

$$\alpha = 2r_0 / r$$

Така получаваме:

$$r = 2r_0 / \alpha \quad (1)$$

Чрез измерване по скалата за ректасцензия на схемата получаваме мащаба на изображението в градуси:

$$204 \text{ мм} / 150^\circ = 1.36 \text{ мм на } 1^\circ$$

Забелязваме, че за разлика от скалата по ректасцензия, скалата по деклинация не е равномерна. Затова се стремим да използваме предимно скалата по ректасцензия. За да пренесем мащаба към снимката, избираме от схемата две звезди, които са разположени на линия, възможно по-близка до хоризонталната. Измерваме разстоянието между тях в милиметри (12.5 мм). Намираме същите звезди на снимката и измерваме разстоянието между тях (75 мм). Чрез сравняване на разстоянията между звездите върху схемата и върху снимката, определяме, че мащабът на снимката е $75/12.5 = 6$ пъти по-голям, или 8.16 мм на 1° . После измерваме в милиметри дължината на следата, оставена от неизвестния обект, която е 33 мм, и получаваме за ъгловата ѝ дължина

$$\alpha = 33 / 8.16 \approx 4^\circ$$

За разстоянието до обекта от формула (1) получаваме:

$$r \approx 28.7 \text{ а.е.}$$

От таблицата с данните за планетите от Слънчевата система виждаме, че това съответства приблизително на разстоянието до планетата Нептун. Наистина, от снимката виждаме, че този определено далечен обект е твърде ярък, за да бъде някой астероид. Следователно, първият извод, който можем да направим, е че това е планетата Нептун.

Но дали можем да сме сигурни в това? Нека си припомним, че ние не отчетохме преместването на обекта по неговата орбита в рамките на петмесечния период, през който е фотографирана следата му. Ако отчетем това отместване при всички случаи бихме получили по-малко разстояние до обекта. При това неточността на нашата оценка може да е значителна. Получената от нас приблизителна оценка на разстоянието представлява само максимална граница, до която то може да достига.

Да пресметнем каква е видимата ъглова скорост на обекта на фона на звездите във времето около самата опозиция. Теоретично тази скорост е:

$$\omega' = (v_T - v_P) / (r_P - r_T)$$

където v_T и v_P са линейните орбитални скорости съответно на земята и планетата, а r_P и r_T са разстоянията им до Слънцето. Около момента на опозиция видимата ъглова скорост на преместване на планетата е най-голяма. Затова върху снимката измерваме разстоянието между две точки в центъра на примката, които ограждат три интервала и две други точки. То е 6.5 мм и съответства на $6.5 / 8.16 = 0.8^\circ$. Приемаме, че положенията на обекта, както и на Марс са заснети през приблизително равни интервали от време. Виждаме, че са заснети 29 положения за пет месеца. Това означава, че положенията са фотографирани през около $153/28 = 5.5$ дни. Следователно видимата ъглова скорост на обекта на фона на звездите в опозиция е $\omega' \approx 0.048^\circ$ на ден. От таблицата с данните за планетите пресмятаме и получаваме, че видимите ъглови скорости на Уран и на Нептун са съответно 0.043° на ден и 0.028° на ден. Въпреки грешките при измерванията получените стойности ни дават основание да предположим, че заснетият обект е не планетата Нептун, а по-близката до нас планета Уран. Така се оказва и в действителност.

